

非保存系に対する準シンプレクティック時間積分法

Semi-Symplectic Time Integration Method for Kinds of Non-Conservative

(株)砂子組 ○正 員 田尻 太郎 (Taro Tajiri)
 (株)砂子組 正 員 近藤 里史 (Satoshi Kondo)

1. はじめに

シンプレクティック法は、特異性の強い非線形な保存系の長時間積分においても数値誤差の蓄積が起らず、安定な結果を与える数値的時間積分である。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが分離される典型的な保存系においては本質的に陽解法となり、その場合の計算量は陽的オイラー法と同じであり、無条件安定な陽解法になる。このような理由もあり 1980 年頃から理論的整備が進み、現在では保存系に対しては確立した方法となっていると思われる¹⁾。

一方、非保存系に対しては、シンプレクティック法の特徴を生かした定式化が困難であるため、時間依存外力と速度に比例する減衰を持つ最も簡単な線形系についてもほとんど試みられていないと思われる。

ここでは 1 次の陽的シンプレクティック法に注目し、非保存線形系の数値例によって、ニューマークの β 法、4 次のルンゲ・クッタ法、理論解との実用的レベルでの比較を試みた。

2. 背景

1 次の陽的オイラー法と 1 次の陽的シンプレクティック法の定式化を例に、理論的背景を述べる。

典型的な単振動の運動方程式、

$$\frac{d^2q}{dt^2} + q = 0 \quad (1)$$

に対する 1 次の陽的オイラー法の定式化は、時間ステップ幅を τ 、 p を運動量、

$$p = \frac{dq}{dt} \quad (2)$$

とすると、

$$\begin{aligned} q(t + \tau) &= q(t) + \tau p(t) \\ p(t + \tau) &= p(t) - \tau q(t) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。(3)による数値解を位相空間にプロットすると図-1 である。初期条件は $t=0$ で $q=1$ 、 $p=0$ 、時間ステップ幅 $\tau=2\pi/100$ とした一周分の結果である。

式(3)から明らかなように、オイラー法では 1 ステップごとに、数値解は理論解の軌道、すなわち理論解のエネルギー曲線の接線方向に進み軌道半径は増加する。位相空間の軌道半径は系のエネルギーに対応するため、数値積分を繰り返すと数値誤差は蓄積し発散する解になる。

$$\begin{aligned} q(t + \tau) &= q(t) + \tau p(t) \\ p(t + \tau) &= p(t) - \tau q(t + \tau) \end{aligned} \quad (4)$$

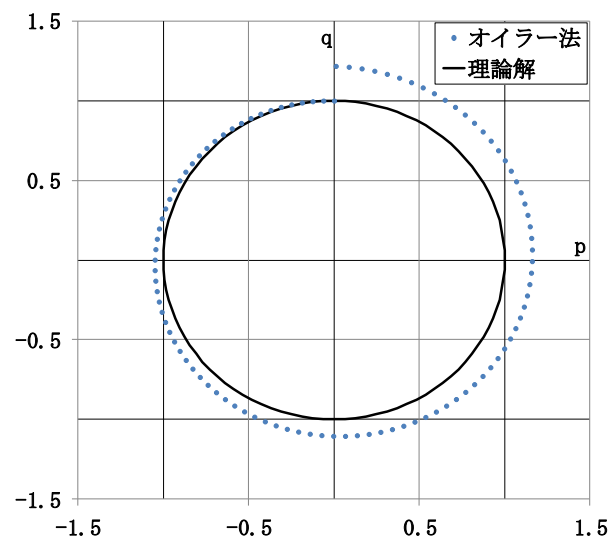


図-1 一次のオイラー法

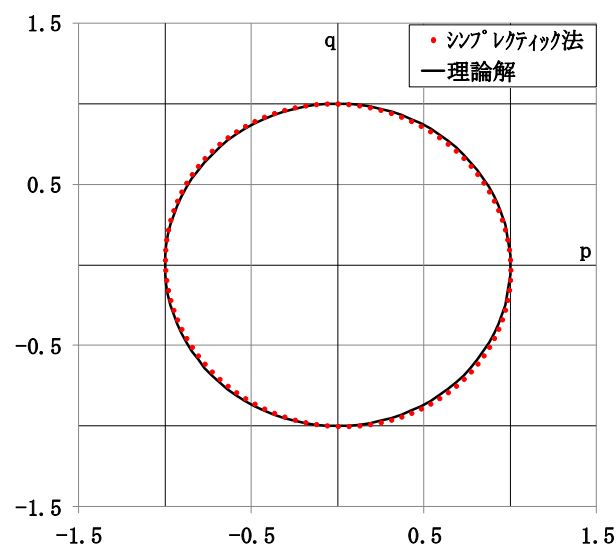


図-2 一次のシンプレクティック法

式(4)が 1 次の陽的シンプレクティック法の定式化である。(3)と(4)には 2 段目の運動量更新手続きにおける僅かな差しかないが、結果は図-2 に示すように劇的に改善され、一周期後に軌道半径は初期値に戻るのに近似的にエネルギーが保存されて数値誤差の蓄積はない事がわかる。以上の違いは、以下のように考えられる。

オイラー法の 1 段目は等速運動を仮定した変位の更新であり、2 段目は等加速度運動を仮定した運動量の更新でそれらを同時に行うが、このような運動は原理的にあり得ない。そのためエネルギーは保存しない。

一方シンプレクティック法も各段の更新手続きは同じ

であるが、等速運動させてから等加速度運動させるので、このような運動を表す近似運動方程式は存在する。加えて系は保存系なので、近似エネルギー曲線も存在する。

近似軌道の局所的な精度はオイラー法もシンプレクティック法も1次オーダーであるが、一般に保存系のエネルギー曲線は閉軌道なので、シンプレクティック法では近似軌道が真のエネルギー曲線を大域的に1次オーダーで近似する事になる。この事は、時間推進演算子を用いた厳密な理論的定式化で確認されている²⁾³⁾。

上記の状況をやや一般化すると、非保存系であっても、近似運動方程式が存在するような数値アルゴリズムを与え、かつ少なくとも位相空間の軌道が有界であるような系に対しては、シンプレクティック法は有効である可能性があると考えた。

3. 非保存系に対する定式化

運動方程式として、時間依存外力と速度に比例する減衰を持つ、以下の線形系を考える。

$$\frac{d^2q}{dt^2} + c \frac{dq}{dt} + kq = f(t) \quad (5)$$

ここでcは減衰マトリックス、kは剛性マトリックス。最も単純に、等速運動後に等加速度運動させる1次の手続きは、

$$q(t + \tau) = q(t) + \tau p(t)$$

$$p(t + \tau) = p(t) - \tau(cp(t + \tau) + kq(t + \tau) - f(t + \tau))$$

と書ける。上式の2段目をp(t + τ)について解いた、

$$q(t + \tau) = q(t) + \tau p(t)$$

$$p(t + \tau) = (E + \tau c)^{-1}(p(t) - \tau(kq(t + \tau) - f(t + \tau))) \quad (7)$$

を、ここでは準シンプレクティックな解法と呼ぶ。Eは単位行列。

4. 数値例

位相空間の軌道が有界になる例として橋脚の伸び振動の運動方程式を考える (Mは質量マトリックスで Lamped Mass)。

$$M \frac{d^2q}{dt^2} + C \frac{dq}{dt} + Kq = Mf(t) \quad (8)$$

f(t)は平成15年十勝沖地震(本震)の幕別町本町の気象庁強震加速度記録120秒の20~60s間を10Hzハイカット処理したものを柱頭に力として作用させる(図-3)。式(8)のパラメータ諸元は、上部工反力10tfを持つ径1mのコンクリート円柱橋脚とし、弾性係数は25000N/mm²、長さ10m、減衰は全モードに対して臨界減衰比3%とする。単位体積重量は24kN/m³。

最初に解法の基本特性を見るため、無減衰で橋脚を1本の弾性棒とみなした。固有周期はT₀=0.015s。時間ステップ幅τ=T₀/15(図-4)とした場合、定常状態においてルンゲクッタ法(4次)は数値減衰のために解が0に収束する。β=1/4のニューマーク法は無条件安定で

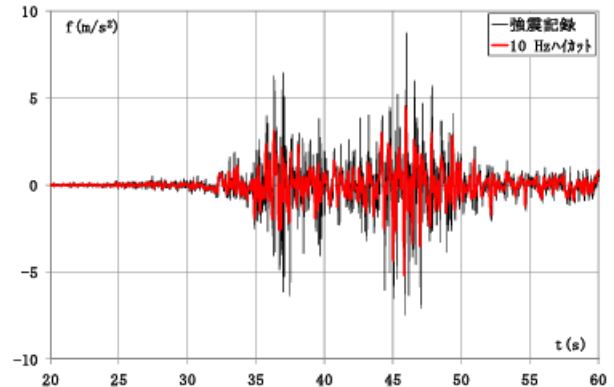


図-3 平成15年十勝沖地震(本震, UD成分)

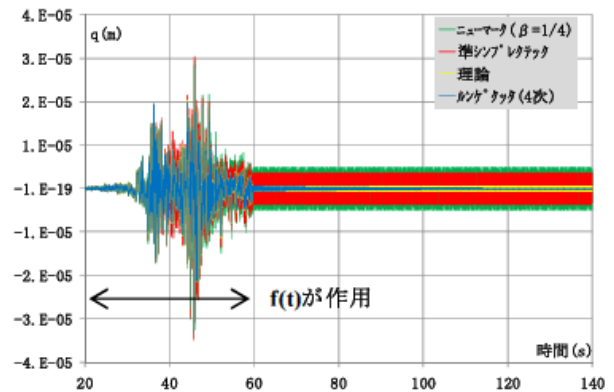


図-4 無減衰, 1分割, τ=T₀/15

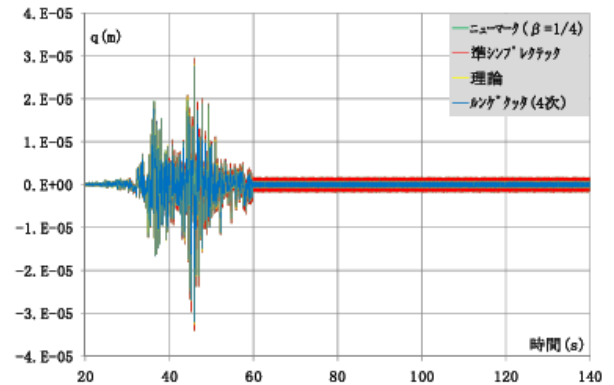


図-5 無減衰, 1分割, τ=T₀/45

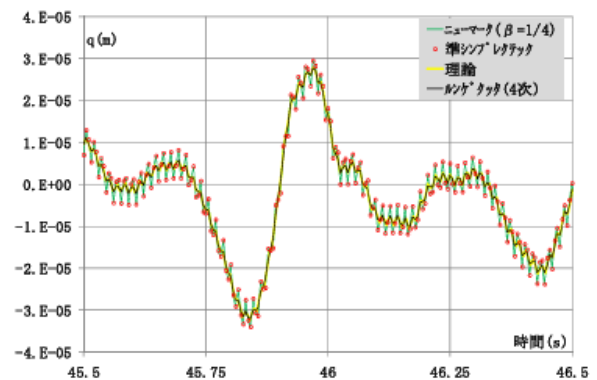


図-6 無減衰, 1分割, τ=T₀/45, 最大変位近傍

エネルギーの保存性を示すが、振幅は理論解の数倍になる。準シンプレクティック法は無条件安定で同様である。

$\tau = T_0/45$ (図-5) では、どの解法も定常状態ではほぼ同等な振幅を示し、ルンゲクッタ法に目立った減衰はみられない。図-5 の最大変位付近が図-6 であるが、ルンゲクッタ法が最も精度が良く、ニューマーク法と準シンプレクティック法は同じ挙動で、実用的には問題ない程度と思われる。

次に橋脚を棒要素で 10 等分割すると最大固有周期は $T_0 = 0.014$ s, 最小は $T_{10} = 0.001$ s になる (無減衰)。以降の結果は杭頭変位である。

図-6 において $\tau = T_{10}/5$ とすると τ が十分小さいため、ルンゲクッタ法に減衰は見られず振幅は理論解と同一である。ただし位相のずれはみられる。ニューマーク法と準シンプレクティック法は定常状態で理論解の 2 倍程度の振幅であるが、最大変位は理論解とほぼ同等である。

図-7 の $\tau = T_{10}/10$ では、どの解法も理論解と概ね一致するようになり、ルンゲクッタ法の位相のずれは減少する。

図-8 は、 $\tau = T_{10}/10$ としたルンゲクッタ法と、 $\tau = T_{10}/100$ のニューマーク法、準シンプレクティック法であるが、理論解と良く一致するのがわかる。図-8 における最大変位近傍と定常状態の拡大を、図-9, 10 に示す。

図-11, 12 は、10 分割で臨界減衰比 3%, $\tau = T_{10}/3$ としたケースであるが、減衰のため解が平滑化され、数値解は理論解と非常に良く一致する。通常はこの程度の条件下で時刻歴解析を行っていると考えられる。

5. エネルギーの保存性

図-13, 14 に、力学的エネルギー $E(t)$ を、

$$E(t) = \frac{1}{2} M \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} K q^2 \quad (9)$$

で計算し、理論解とのエネルギー比をとった結果を示す。図-13 は図-8 に、図-14 は図-9 に対応する。 $\tau = T_{10}/10$ では、ニューマーク法と準シンプレクティック法は理論解の約 2 倍のエネルギーに達しているが、 $\tau = T_{10}/100$ でエネルギー誤差は 3% 以内であり、ルンゲクッタ法と同程度である。4 次のルンゲクッタ法の精度が最も良いが、詳しくみるとエネルギーは減衰傾向する。これはルンゲクッタ法の特徴であるが、実用的には問題ない。

6. CPU 負荷

表-1 に、10 分割、無減衰、 $\tau = T_{10}/3$ で解析時間 5000 s (最小周期の 5000000 周期分) に対する各解法の計算時間を示す。5000 s に対し、どの方法にも顕著な解の発散や減衰は見られなかった。2 次のニューマーク法の計算時間が 4 次のルンゲクッタ法の約 2 倍になるのは、注目に値すると思われる。1 次の準シンプレクティック法の計算時間は、ニューマーク法の 1/6 程度である。

7. まとめ

(1) 1 次の準シンプレクティック法と 2 次のニューマーク法 ($\beta = 1/4$) は、非保存系に対しても全てのケースで、同等な性能を示した。

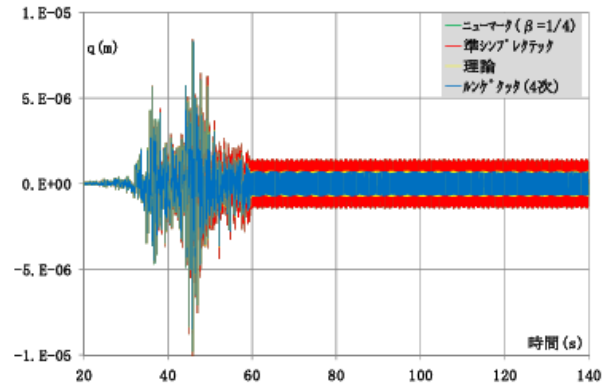


図-6 無減衰, 10 分割, $\tau = T_{10}/5$

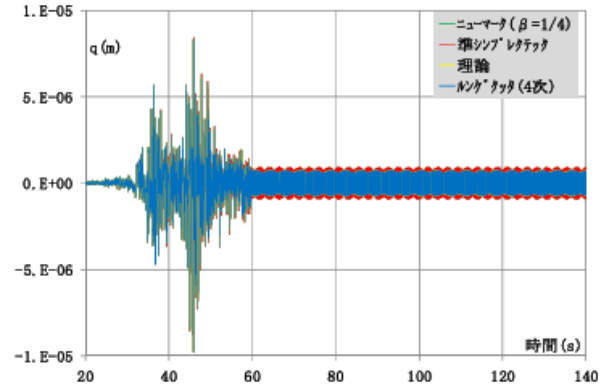


図-7 無減衰, 10 分割, $\tau = T_{10}/10$

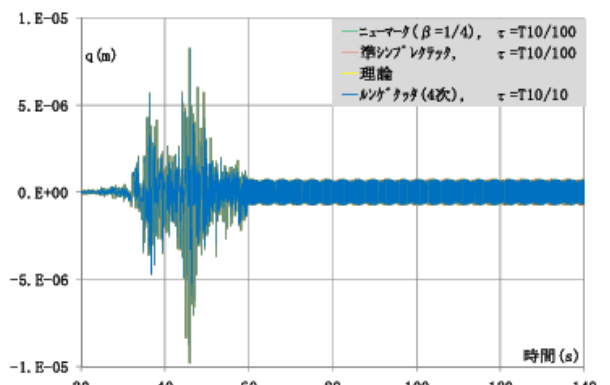


図-8 無減衰, 10 分割, $\tau = T_{10}/10, T_{10}/100$

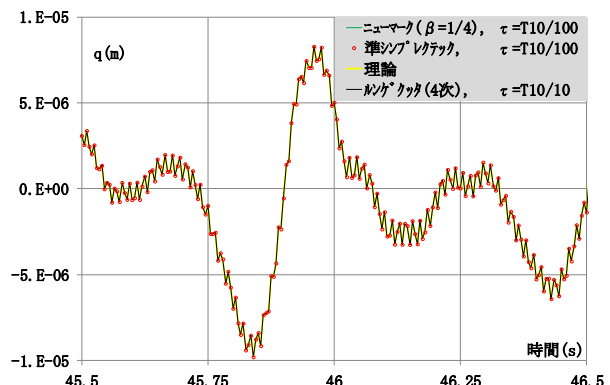


図-9 最大変位近傍 (図-8)

(2) 特に非保存系のエネルギー挙動が、準シンプレクティック法とニューマーク法 ($\beta = 1/4$) で同じであ

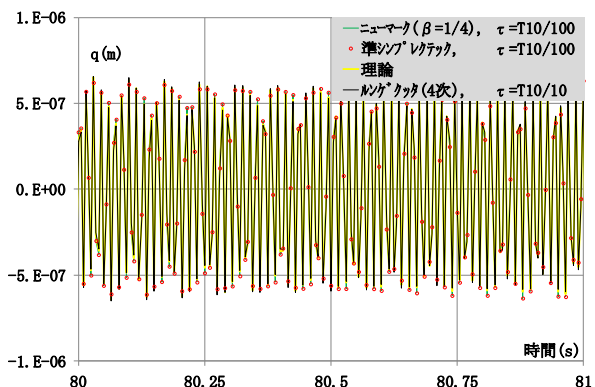


図-10 定常状態 (図-8)

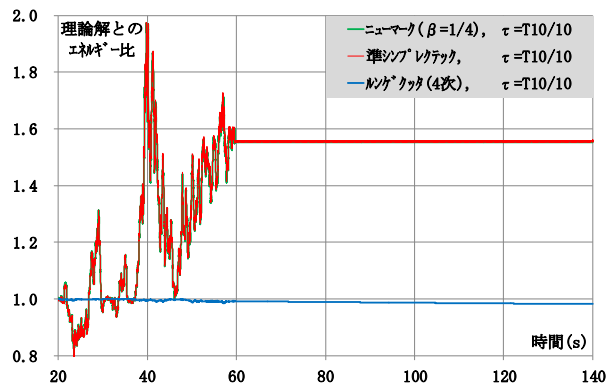


図-13 理論解とのエネルギー比 (図-8)

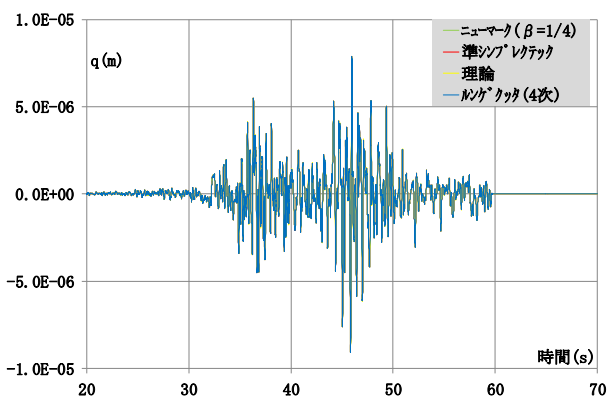


図-11 モード減衰 3%, 10 分割, $\tau = T_{10}/3$

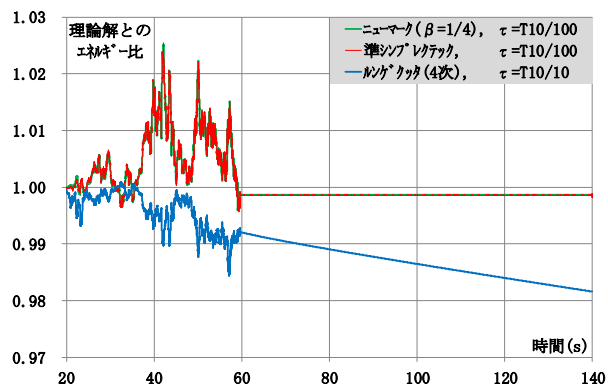


図-14 理論解とのエネルギー比 (図-9)

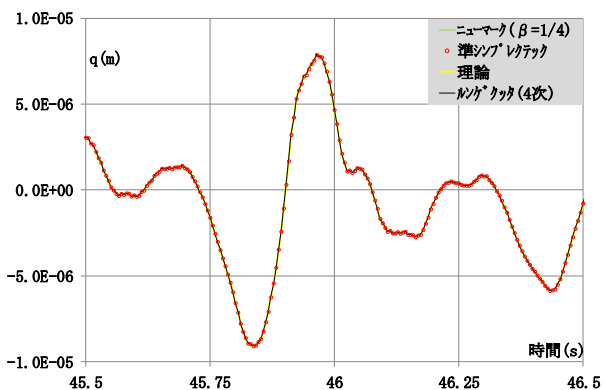


図-12 モード減衰 3%, 10 分割, $\tau = T_{10}/3$, 最大変位近傍

り、無条件安定な結果となった。

4 次のルンゲクッタ法は全体的に最も精度が良好であるが、エネルギーが減衰する数値的特性を持つ事を確認できた。ただし実用上は問題にならない。

- (3) CPU 負荷の面では、2 次のニューマーク法の計算時間が 4 次のルンゲクッタ法の約 2 倍になった。1 次の準シンプレクティック法の計算時間は、ルンゲクッタ法の 1/3, とニューマークの 1/6 程度である。
- (4) 計算手続きは明らかに、準シンプレクティック法が最も簡易である。

無条件安定な陽的解法であるシンプレクティック法は、衝撃問題にも適した方法だと考えられる。また陽的シン

表-1 CPU 負荷の比較 (Matrix Size=10)

解法	近似次数	計算時間 (s)	解析時間 (s)
ルンゲ・クッタ	4次	51	5000
ニューマーク ($\beta=1/4$)	2次	95	
準シンプレクティック	1次	15	

プレクティック法は、8 次オーダーのものまで知られており²⁾、高次近似を行えばより高い精度と計算時間の短縮を期待できる。

[参考文献]

- 1) 臨時別冊・数理科学, 計算物理入門, サイエンス社, 2001 年 9 月.
- 2) ハミルトン力学系のためのシンプレクティック数値積分法, 吉田春夫, https://ir.soken.ac.jp/index.php?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_snippet&pn=1&count=50&order=16&lang=japanese&creator=%E5%90%89%E7%94%B0+%E6%98%A5%E5%A4%AB&page_id=29&block_id=155
- 3) シンプレクティック積分法について, 陰山聡, http://www.research.kobe-u.ac.jp/csi-viz/members/kageyama/docs/140110a_symplectic_integrator.pdf