

シンプレクティック時間積分法と撃力を用いた 無減衰な理想化された弾塑性衝撃応答解析および各種解法比較

undamped idealized elastoplastic shock Response Analysis used symplectic Time Integration Method and impulsive Force as well as Comparison of several numerical Solutions

(株)砂子組 ○正 員 田尻太郎 (Taro Tajiri)
(株)砂子組 正 員 古川大輔 (Daisuke Furukawa)

1. はじめに

シンプレクティック時間積分法は、高い実行速度と無条件安定な精度が保証され、保存系の範囲ではほぼ確立された運動方程式の数値積分法である¹⁾。ここで保存系とは、質点に働く力が変位だけに依存する系の事を言い、そこでは力学的エネルギー保存則が成立する。M, K を質量、剛性マトリックス、q を変位ベクトル、・を時間微分として、構造系の自由振動方程式、

$$M \ddot{q} + Kq = 0 \quad (1)$$

は、保存系の一種である。

多くの弾塑性解析では図-1 のような、バイリニアな応力-歪み関係が仮定される。有限要素法解析を念頭におけば、応力-歪み関係は適当な剛性マトリックスと変位ベクトル q から定義できるので保存力であり、ポテンシャルエネルギー $1/2 \times q^T K q$ が存在する。ただし時刻歴挙動を考慮すると、無減衰であっても履歴減衰が生じ、通常の保存系とは言い難いが、時間的に局所的に見れば保存系と考えられる。また衝撃載荷を理想化し撃力とみなせば、載荷の瞬間に速度が不連続に変化するだけで、系が無減衰なら載荷時間以後は保存系である。

ここでは撃力により理想化した無減衰な弾塑性衝撃応答解析を行い、ニューマーク β 法 ($\beta=1/4$, 無条件安定) および 4 次のルンゲクッタ法との結果比較により、2 次の陽的シンプレクティック法の有用性を確認した。

2. 各解法の計算手続き

数値的時間積分の時間ステップ幅を τ で表す。

1) 4 次のルンゲクッタ法

$$k_j = v^{(j)}, \quad l_j = -K^{(j)}q^{(j)}$$

$$q^{(j+1)} = q^{(0)} + \frac{\tau}{\alpha} k_j, \quad v^{(j+1)} = v^{(0)} + \frac{\tau}{\alpha} M^{-1} l_j$$

$$Q = q^{(0)} + \tau(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6$$

$$V = v^{(0)} + \tau(l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3)/6$$

ただし、

$j=0 \sim 2$ 。 $j=0, 1$ で $\alpha=1/2$ 、 $j=2$ で $\alpha=1$ 。

$v^{(0)}$: 時刻 t の速度ベクトル, $q^{(0)}$: 時刻 t の変位ベクトル。

V : 時刻 $t+\tau$ の速度, Q : $t+\tau$ の変位。

$K^{(j)}$: $j=0$ は t 時点の剛性マトリックス, $j \neq 0$ は $t+\tau/2$ 。

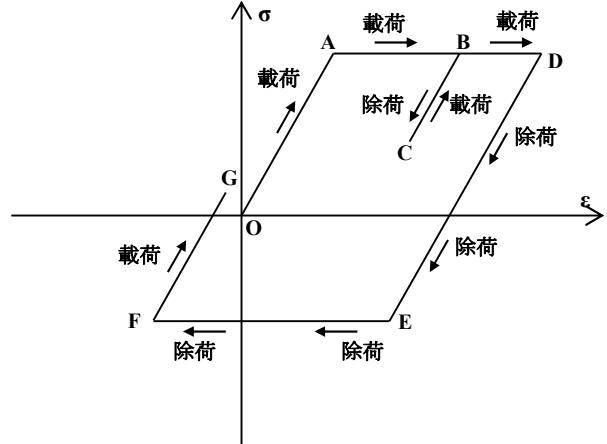


図-1 バイリニアな応力-歪み関係の模式図

2) ニューマーク β 法 ($\beta=1/4$), 2 次精度

$$A = \left(E + \frac{\tau^2}{4} M^{-1} K \right)^{-1} \left(a - M^{-1} K \left(\tau v + \frac{\tau^2}{4} a \right) \right)$$

$$V = v + \frac{\tau}{2}(a + A), \quad Q = q + \tau v + \frac{\tau^2}{4}(a + A)$$

ただし、

E : 単位行列, K : t 時点。

a : t の加速度, v : t の速度, q : t の変位。

A : $t+\tau$ の加速度, V : $t+\tau$ の速度, Q : $t+\tau$ の変位。

3) 2 次の陽的シンプレクティック法

$$q' = q + \frac{\tau}{2} v, \quad v' = v - \frac{\tau}{2} M^{-1} K' q'$$

$$V = v' - \frac{\tau}{2} M^{-1} K' q', \quad Q = q' + \frac{\tau}{2} V$$

ただし、

v : t の速度, q : t の変位。

v' : $t+\tau/2$ の速度, q' : $t+\tau/2$ の変位, K' : $t+\tau/2$ 。

V : $t+\tau$ の速度, Q : $t+\tau$ の変位。

3. 計算例としたモデルの概要

図-2 に、計算例としたモデルを示す。断面積 $A=1 \text{ m}^2$, 全長 $L=10 \text{ m}$ の鋼材柱を定歪み棒要素で 100 分割し (要素長 $Le=0.1 \text{ m}$)、柱頭に衝撃交番載荷を与えた。

材料定数は、弾性係数 $E=200000 \text{ N/mm}^2$, 降伏点 $\sigma_y = 140 \text{ N/mm}^2$ (SS400 級), 限界歪み $\epsilon_u=5000 \mu$, 密度 $\rho=7700 \text{ kg/m}^3$ 。

質量マトリックス M は、1 要素の質量を両端節点に集めた Lumped Mass とし、節点質量は $m = \rho A L e / 2 = 385$ kg。 M の非零要素は、対角成分のみである。

1 要素の固有周期 $T(s)$ を、

$$T = L e \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2)$$

で計算すると約 0.02 ms (1.962×10^{-5} s) となり、ここから時間ステップ幅を $\tau = T/100$ と $T/10$ の 2 ケースとして計算を行った。約 1/50000 ms と 1/5000 ms。

衝撃交番載荷は自由端節点への撃力としたが、応力波の伝播速度は $v_o = (E/\rho)^{1/2} = 5096$ m/s で、自由端→固定端→自由端の往復には $T_L = 4$ ms (3.924×10^{-3} s) かかる。

交番間隔は T_L とし、解析時間は応力波が 5 往復する 0.02 s とした。

撃力は自由端節点の速度が $\Delta v = 20$ m/s だけ不連続に変化する大きさとした。これは $m\Delta v = 7700$ kg·m/s の運動量を与える撃力である。

図-3 に仮定したバイリニアな応力-歪み関係を示す。計算値が限界歪み ϵ_u を超えた時には、計算終了とした。

4. 塑性化、除荷の判定

2.1), 3)に示したルンゲ-クッタ法と陽的シンプレクティック法は陽解法と陽的解法であり、 t と $t + \tau/2$ 時点の剛性マトリックスを使用する。 t と $t + \tau/2$ の間で図-3 に示した塑性化、除荷が起った場合、剛性マトリックス K を更新する必要がある。ここで歪み、歪み速度等は要素両端の節点変位と速度等から計算できる。

陽解法であるルンゲクッタ法は、速度と変位を同時に更新するので、 ϵ' を歪み速度として各更新ステップで $\epsilon(t)$ と $\epsilon'(t)$, $\epsilon(t + \tau/2)$ と $\epsilon'(t + \tau/2)$ の 4 つがわかる。そこで、これらから歪み ϵ を時間に対して 3 次補間し、図-4 のように判定した。 ϵ が塑性化歪みを超えると弾性→塑性、塑性状態で歪み速度 0 の極値点で除荷が起こるとし、 K を更新する。除荷の場合、除荷時の歪みから傾き E の直線を降ろし、 $\sigma=0$ 軸との交点を新たな残留歪み ϵ_0 として更新する(図-3)。最終的には $t + \tau$ 時点の K と ϵ_0 の更新も必要である。なお図-4 のように 2 回の塑性化が起こる場合は、時間ステップ幅が大きいとして計算を終了した。陽的解法であるシンプレクティック法では、変位と速度を $\tau/2$ 間隔で交互に更新するので、 $\epsilon(t)$, $\epsilon(t + \tau/2)$, $\epsilon'(t)$ 、または $\epsilon(t + \tau/2)$, $\epsilon(t + \tau)$, $\epsilon'(t + \tau)$ から 2 次補間を行い、同様に判定した。

K の更新は、要素-節点対応表に従い状態遷移を起こす要素に該当する K の部分から、弾性→塑性では要素剛性マトリックスを引き、塑性→弾性では足すという操作を行った。なおルンゲクッタ法とシンプレクティック法では、要素歪みから直接等価節点力を算出し要素-節点対応表に従い重ね合わせたので、 K を用いていない。

2.2)のニューマーク β 法では、陰解法の性質上 K は t 時点のものを用いなければならない。そこで最大ステップ幅 τ から状態遷移要素の数をカウントする 2 分法探索を行い、塑性点と除荷点に達する時間幅 τ' の特定を行った。2 分法の打切は $\tau \times 10^{-6}$ である。塑性点の場合、

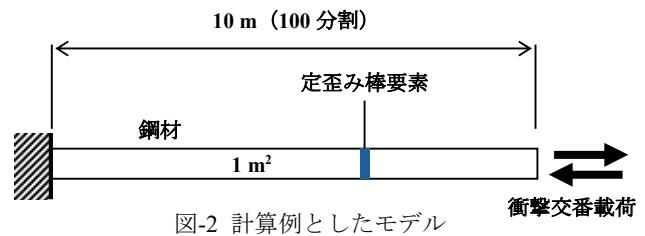


図-2 計算例としたモデル

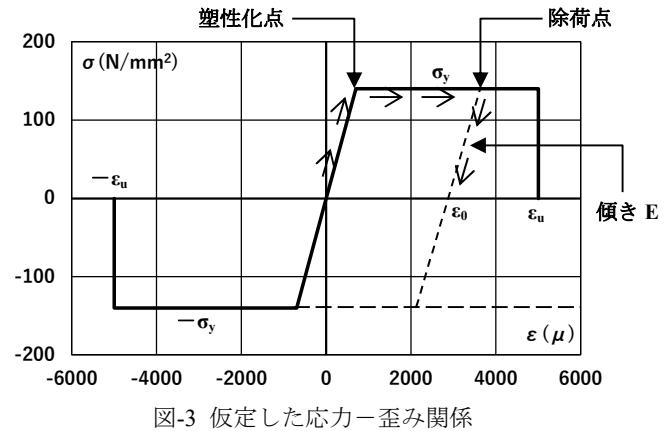


図-3 仮定した応力-歪み関係

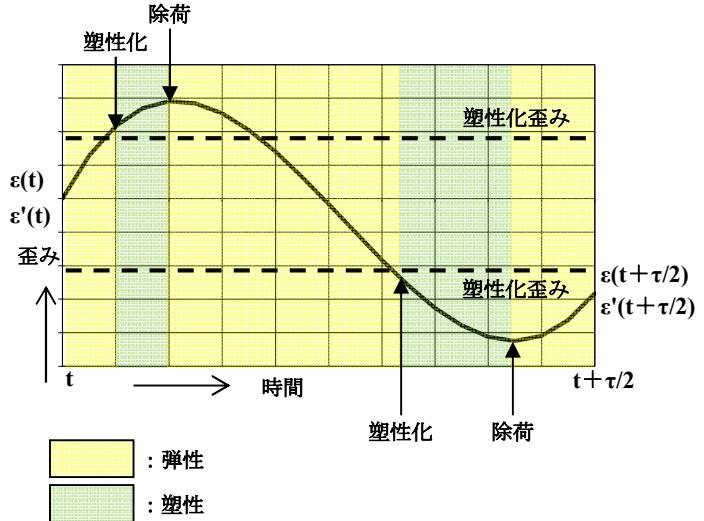


図-4 時間にに対する歪み補間の模式図

次ステップの状態は歪み速度の正負で、除荷点の場合は歪み速度 0 のため、歪み加速度の正負で決定する。

5. 計算結果（変位）

最も変動の大きい柱頭変位を図-7 に示す。 $\tau = T/100$ と $T/10$ のルンゲクッタおよび $T/10$ のシンプレクティック法はほとんど重なり、違いがみられない。 $T/10$ のニューマーク β 法には位相の遅れがみられ、振幅も若干異なる。終端の 0.4 ms を図-8 に拡大して示す。ここでも $T/100$ と $T/10$ のルンゲクッタは完全に重なる。シンプレクティック法には、わずかに位相の進みがみられる。

$\beta = 1/4$ のニューマーク法とシンプレクティック法の位相のずれは、無条件安定な解法でみられる現象である。一方そうでないルンゲクッタ法では位相のずれではなく、振幅の変化がみられるはずであるが、 $T/100$ と $T/10$ がほとんど完全に一致する事から、 $T/100$ のルンゲクッタ法の数値解は、厳密解に近い事が示唆される。

6. 計算結果（エネルギー）

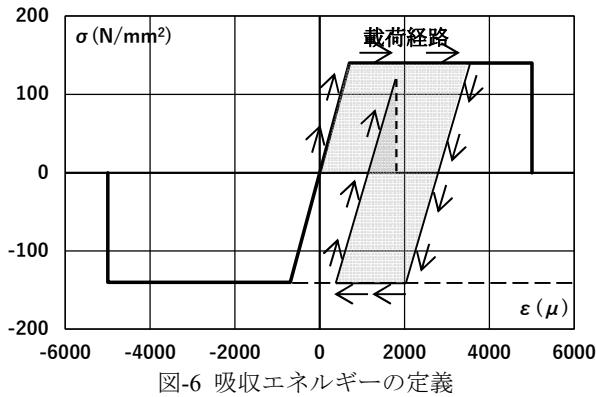


図-6 吸收エネルギーの定義

塑性化が起こると履歴減衰が生じ、剛性マトリックスによるポテンシャルエネルギー計算が不便になるため、次式により構造への吸収エネルギーUを計算した。これは図-6のハッチ部の面積である。jを要素番号として、

$$U = ALe \sum_j \int_0^t \sigma_j(t) d\varepsilon_j(t) \quad (3)$$

Vを運動エネルギー、Eを全エネルギーとすれば、Uには履歴減衰による損失エネルギーも含まれるので、

$$E = V + U \quad (4)$$

は、外力による仕事がない限り一定になる。

図-9にEの結果を示す。ここでもT/100とT/10のルンゲクッタ法とシンプレクティック法はほとんど一致し、ニューマーク法だけが若干違う。

7. 計算結果（安定性）

撃力載荷後は、次の載荷まで全エネルギーEは一定でなければならない。エネルギー変動を載荷時刻からの差として図-10、11に示す。

T/10のルンゲクッタ法は載荷直後の変動増加を除けば、載荷時刻間ではわずかに減少傾向にあり、解の縮退傾向を示す。しかし変位は、他の解法の変位挙動と概ね一致し、計算の安定性は保持されているものと考えられる。ここからもT/100のルンゲクッタ法の解は、厳密解に近い事が示唆される。

シンプレクティック法は、Kの要素を K_{ij} とした時、

$$E' = V + U - \frac{\tau^2}{8} \sum_i K_{ii} v_i^2 \quad (5)$$

で表されるエネルギーE'を持つ近似系の厳密解を与える。これを保存する。 $v=(v_i)$ は速度ベクトル。

E' とEの差を δ とし、 $K_{ii} \approx EA/Le$ 、 $m_i \approx \rho ALe$ 、 $\tau/T = 1/10$ を考慮すると、運動エネルギーとの比は、常に $\delta/V \approx (\tau/T)^2 = 1/100$ 程度となり、全エネルギーとの比 δ/E は常にこれより小さい。載荷直後に大きく変動し一定値まわりの振動になるのは、同法の無条件安定性の現れと考えられる。

ニューマーク法の変動は、振幅は大きくなるものの振動的である。無条件安定性の現れと考えられる。

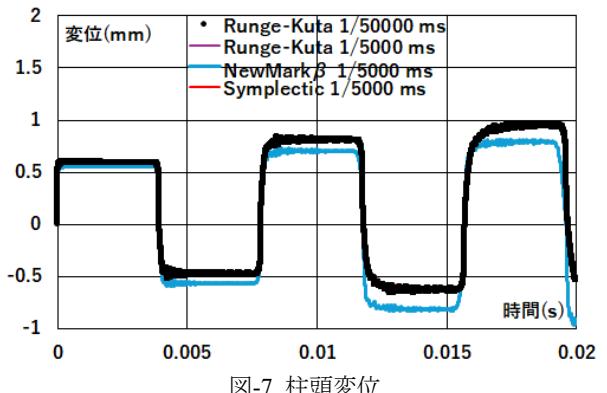


図-7 柱頭変位

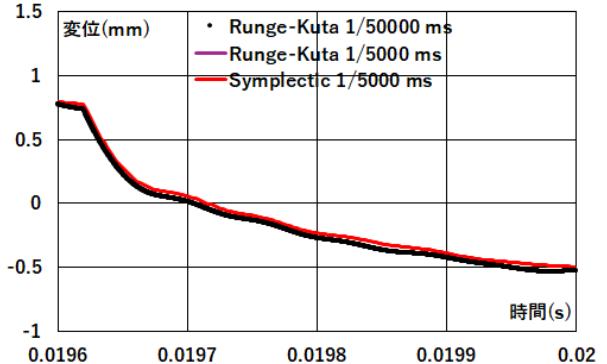


図-8 柱頭変位（終端 0.4 ms）

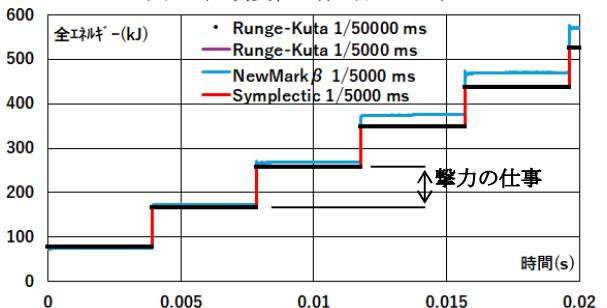


図-9 全エネルギー

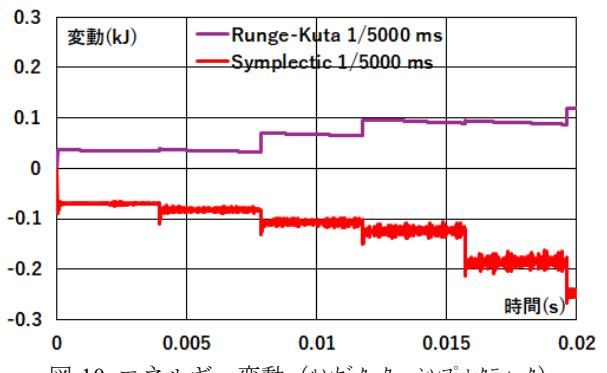


図-10 エネルギー変動（ルンゲクッタ、シンプレクティック）

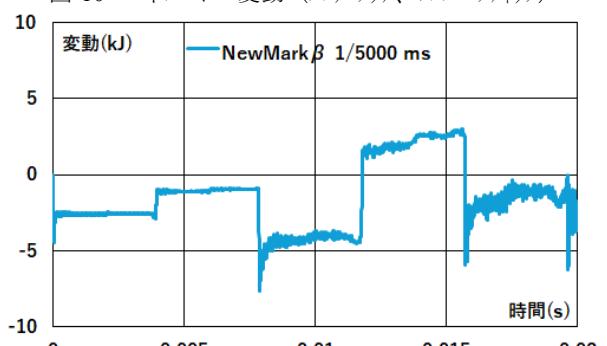


図-11 エネルギー変動（ニューマーク β）

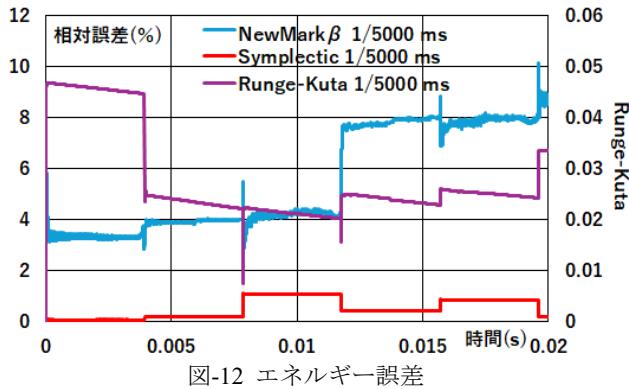


図-12 エネルギー誤差

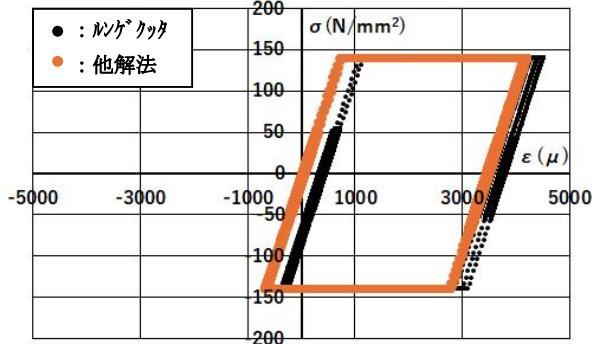


図-14-a) 応力一歪み (ニューマーク T/100, ルンゲクッタ T/100)

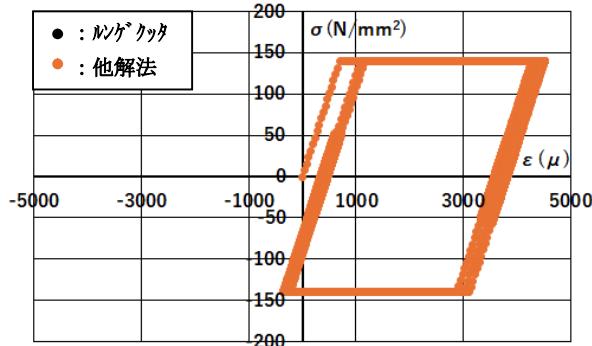


図-15-a) 応力一歪み (シンプレクティック T/100, ルンゲクッタ T/100)

8. 計算結果（エネルギーの保存性）

以後、T/100 のルンゲクッタを厳密解とみなす。図-12 に同法の全エネルギーと各解法との差を、相対誤差(%)として示した。T/10 のルンゲクッタの誤差は最も小さく信頼できる。シンプレクティック法は先に述べた理由から、1 %程度の値で推移する。ニューマーク法の誤差は増加傾向にあり、エネルギーの保存性は認められない。

9. 計算結果（応力一歪み履歴、自由端要素）

図-13, 14 は、厳密解 (T/100 ルンゲクッタ) の応力一歪み履歴に対する、各解法の T/100 と T/10 の結果である。

T/100 としてもニューマーク法は厳密解に一致しないが、シンプレクティック法は一致する。両解法で前者の T/100 と T/10 の違いは大きいが、後者は小さい。

表-1 各解法の実行速度

	精度	実行時間(ms)		Step数		Step当り平均(ms)
		T/100	T/10	T/100	T/10	
ルンゲクッタ法	4次	4638	835	101936	10193	0.064
ニューマークβ法	2次	22842	2949	102110	10362	0.254
シンプレクティック法	2次	1708	404	101936	10193	0.028

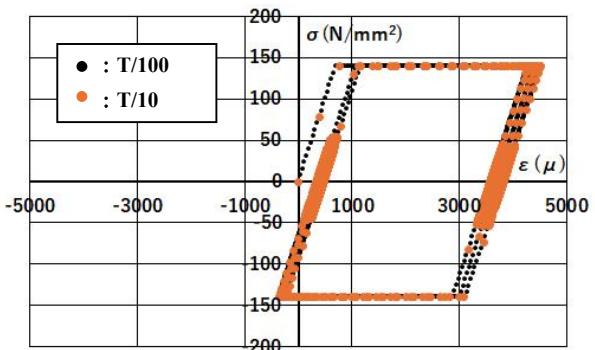


図-13 応力一歪み (ルンゲクッタ T/10, ルンゲクッタ T/100)

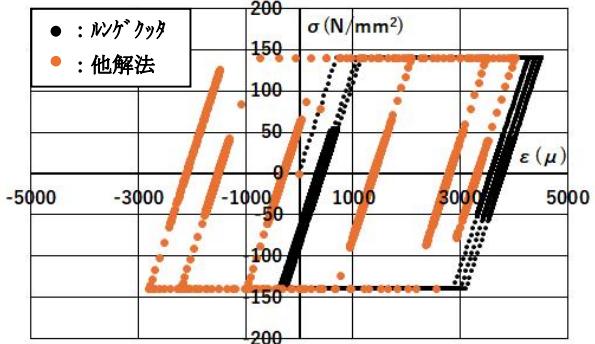


図-14-b) 応力一歪み (ニューマーク T/10, ルンゲクッタ T/100)

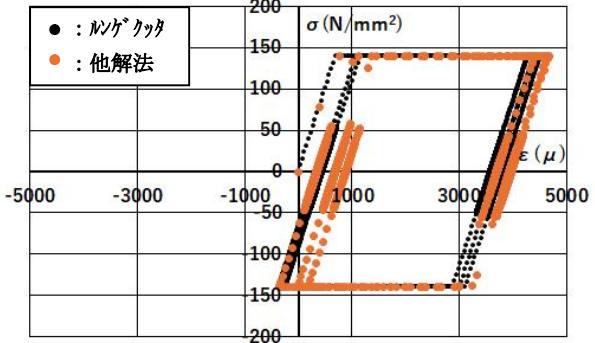


図-15-b) 応力一歪み (シンプレクティック T/10, ルンゲクッタ T/100)

10. まとめ

表-2 各種解法の性能比較

	精度	実行速度(ms/Step)	無条件安定性	エネルギー保存性	時刻刻み(感度)
ルンゲクッタ法	4次	0.064	なし	なし	極めて小
ニューマークβ法	2次	0.254	保証付き	なし	大
シンプレクティック法	2次	0.028	保証付き	保証付き ^{*)}	小

*)：近似エネルギーに対するもの。

表-2 より陽的シンプレクティック法は、非常にコストパフォーマンスの良い解法と考えられる。

なおルンゲクッタ法で T/100 と T/10 の結果は一致するが（図-13）、シンプレクティック法では一致しないのは（図-15-a)と b))、解法精度 4 次と 2 次の違いによる可能性もあるが、4 次の陽的シンプレクティック法はすでに知られており、2.3)のようなシンプルな計算アルゴリズムである。

[参考文献]

- 1) 臨時別冊・数理科学、計算物理入門、サイエンス社、2001 年 9 月。